ГЛАВА 1 МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1 Матрицы. Основные понятия и определения

Определение 1. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, A, B, C, …, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i - номер строки, j - номер столбца.

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, в сокращенной записи,

$$A = \left(a_{ij}\right); \quad i = 1,2,\dots,m; \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Например, $\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$. Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы: $[\ ]$, $\|\ \|$.

Две матрицы A и B одного размера называются **равными,** если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1,2,\dots m; \quad j = 1,2,\dots,n.$

Виды матриц. Матрица, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой (вектором-строкой),** а из одного столбца – **матрицей–столбцом (вектором-столбцом):**

$$A = \left(a_{11}\, a_{12}, \dots, a_{1n}\right) - \text{матрица-строка}; \; B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} - \text{матрица-столбец}.$$

Матрица называется **квадратной** n-го порядка, если число её строк равно числу столбцов и равно n.

Например, $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & -7 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки $(i = j)$, называются **диагональными** и образуют **главную диагональ** матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется **диагональной.**

Например, $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется **единичной** матрицей n-го порядка, она обозначается буквой E.

Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка.

Матрица любого размера называется **нулевой**, если все её элементы равны нулю:

$$\underset{m \times n}{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Операции над матрицами. Умножение матрицы на число

Определение 1. Произведением матрицы A на число α называется матрица $B = \alpha A$, элементы которой $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ при $i = 1,2,\ldots,m;\quad j = 1,2,\ldots,n$.

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, т.е. $0 \cdot A = O$.

Определение 2. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ при $i = 1,2,\ldots,m;\quad j = 1,2,\ldots,n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно). В частном случае $A + O = A$.

Определение 3. Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1) \cdot B$.

Определение 4. Умножение матрицы А на матрицу В определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда произведением матриц $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}, \quad i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Определение 5. Целой положительной степенью $A^m (m > 1)$ квадратной матрицы А называется произведение m матриц, равных А, т.е.:

$$A^m = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A.$$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. По определению полагают $A^0 = E$, $A^1 = A$. Нетрудно показать, что $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$, $(A^m)^k = A^{mk}$.

Транспонирование матрицы – переход от матрицы А к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A' называется **транспонированной** относительно матрицы А:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица А имеет размер $m \times n$, то транспонированная матрица A' имеет размер $n \times m$.

Например, $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $A'_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

В литературе встречаются и другие обозначения транспонированной матрицы, например $A^{т}$.

Решение типовых примеров

Пример 1. Умножить матрицу на число 5, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

$$5A = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ 15 & 40 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Вынести общий множитель за знак матрицы:

$$\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти матрицу C=A+B, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$C = A+B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 8 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Вычислить произведение матриц $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$,

где $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $\underset{2\times3}{\mathrm{A}}\cdot\underset{3\times3}{\mathrm{B}}=\underset{2\times3}{\mathrm{C}}$. Вычислим элементы матрицы-произведения C, умножая элементы каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B следующим образом:

з

Получаем $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 29 & 16 & 19 \end{pmatrix}$.

Пример 5. Найти A^2, где $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 24 & 32 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти матрицу C=A+B, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$
2. Найти матрицу D=C - F, если $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
3. Найти матрицу E=4S+2G, если $S=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4. Найти матрицу X=A·B, если $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&3&-7\\-1&6&-3\\2&-4&1\end{pmatrix}$

1.3 Определители квадратных матриц

Определителем матрицы первого порядка $\mathrm{A}=(a_{11})$, или **определителем первого порядка**, называется элемент a_{11}: $\Delta_1=|\mathrm{A}|=a_{11}$. **Например**, пусть $\mathrm{A}=(8)$, тогда $\Delta_1=|\mathrm{A}|=8$.

Определитель матрицы A обозначается $|A|$, Δ или det A.

Определителем матрицы второго порядка $\mathrm{A}=(a_{ij})$, или **определителем второго порядка**, называется число, которое находится по формуле $\Delta_2=|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$.

Определителем матрицы третьего порядка $\mathrm{A}=(a_{ij})$**, или определителем третьего порядка,** называется число, которое находится по формуле $\Delta_3=|\mathrm{A}|=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$.

Определитель третьего порядка удобно вычислять по правилу треугольников (или по правилу Сарриуса). Покажем это на схеме:

$$\begin{vmatrix}\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\circ\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bullet&\circ&\circ\\\circ&\bullet&\circ\\\circ&\circ&\bullet\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\circ&\bullet&\circ\\\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\\\circ&\bullet&\circ\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\circ&\bullet&\circ\\\bullet&\circ&\circ\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\circ&\bullet&\circ\\\bullet&\circ&\circ\\\circ&\circ&\bullet\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\bullet&\circ&\circ\\\circ&\circ&\bullet\\\circ&\bullet&\circ\end{vmatrix}$$

Например (по правилу Сарриуса),

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\2&4&5\end{vmatrix}=1\cdot0\cdot5+2\cdot1\cdot2+(-1)\cdot4\cdot3-2\cdot0\cdot3-(-1)\cdot2\cdot5-4\cdot1\cdot1=$$

$$=0+4-12-0+10-4=-2.$$

Например, вычисление определителя 4-го порядка сведется к вычислению четырех определителей 3-го порядка.

Свойства определителей:

1) Определитель не меняется, если в нем строки и столбцы поменять местами.

2) Если в определителе поменять местами какие-либо две строки или два столбца, то определитель изменит только знак.
3) Общий множитель какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.
4) Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.
5) Определитель равен нулю, если элементы каких-либо двух строк равны или пропорциональны.
6) Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое не равное нулю число. Это так называемый способ получения нулей.
7) Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

$$a_{11}\cdot A_{21}+a_{12}\cdot A_{22}+a_{13}\cdot A_{23}=0$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить определитель второго порядка, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

Решение. $\Delta=|A|=\begin{vmatrix}-2 & 8\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot5-8\cdot1=-18.$

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка $|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=1\cdot0+1\cdot3+3\cdot6=21.$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить определители:

1) $\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -5 & 2\end{vmatrix}$

2) $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ -2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}$

3) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

4) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$